Borel - Cantelli

Walter Appel, probabilités pour les non probabilistes.
Chabanol Ruch

Théorème : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. $\simeq 6'$ par BC

• Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, ps. un nombre fini d'évent se réalisent.

• Si les (A_n) sont 2à2 indépendants, et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors ps. une infinité dévenement se réalisent.

Demo.

[App] • Soit $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, de sorte que

$$\{\text{une infinité de } A_n \text{ se réalisent}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

ainsi $\{\text{une infinité de } A_n \text{ se réalisent}\} \subset B_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

or $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ comme reste d'une série convergente.

[CR] • Si les A_k st indep, les A_k^c le sont

Soient $n \leq N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right)^c\right)$

$$= 1 - \prod_{k=n}^{N} (1-\mathbb{P}(A_k))$$

or $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $1-x \leq e^{-x}$

donc $\prod_{k=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Puisque $\forall n, N \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{h=n}^{\infty} A_h^c \subset \bigcap_{h=n}^{N} A_h^c$, et que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{h=n}^{N} A_h^c\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{h=n}^{\infty} A_h^c\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

par union disjointe, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{h=n}^{\infty} A_h^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n^c\right) = 0$

en passant au complémentaire, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = 1$.

$\square$

Importance de l'hypothèse d'indépendance :

si $X \sim b(\frac{1}{2})$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = X$.

$P(X_n = 1 \text{ is}) = \mathbb{P}(A = 1) = \frac{1}{2}$, et $\sum \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum \frac{1}{2} = +\infty$.

Corollaire : Si la série $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge $\forall \varepsilon > 0$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{ps} X$. [App] p 386 387 2

d'abord notons que dire que $X_n \overset{ps}{\not\to} X$ revient à dire que $\exists \varepsilon > 0$ tq $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon$, infiniment souvent$) > 0$

ainsi, $X_n \xrightarrow{ps} X$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \text{ is}) = 0$

D'après le lemme 1 de Borel-Cantelli,

$\forall \varepsilon, \sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge implique $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \text{ is}) = 0$

implique $X_n \xrightarrow{ps} X$.

Application : loi forte des grands nombres cas L^4.

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 4.. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid de loi de X. Si $S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{ps} X$ Fait dans [App] pour des Bernoulli, la preuve marche exactement pareil.

Demo Premièrement, notons que puisque $X \in L^4$, X admet un moment d'ordre 2. et 1 (demo à savoir : $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|x|<1}] + \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|x|\geq 1}]$
$\leq 1 + \mathbb{E}[|X|^4] < \infty$)

Ainsi, on peut poser $Y_n = X_n - \mathbb{E}[X_n]$, et $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
$Y = X - \mathbb{E}[X] \in L^4$

$$\mathbb{E}[Z_n^4] = \frac{1}{n^4}\sum_{1\leq i,j,k,r\leq n} \mathbb{E}[Y_i Y_k Y_\ell Y_j]$$

Or, $\mathbb{E}[Y_i] = 0$, donc

- Si $i \notin \{j, k, \ell\}$ $\mathbb{E}[Y_i Y_j Y_k Y_\ell] = \mathbb{E}[Y_i]\,\mathbb{E}[Y_j Y_k Y_\ell]$
$= 0$
- Si $i=j=k=\ell$, $\mathbb{E}[Y_i Y_j Y_k Y_\ell] = \mathbb{E}[Y^4]$, n termes dans la somme
- si $i=j\neq k=\ell$, $\mathbb{E}[Y_i Y_j Y_k Y_\ell] = \mathbb{E}[Y^2]^2$, $3n(n-1)$ termes dans la somme

$$\mathbb{E}[Z_n^4] = \frac{1}{n^3}\mathbb{E}[Y^4] + \frac{3(n-1)}{n^3}\mathbb{E}[Y^2]^2 \sim \frac{3\mathbb{E}[Y^2]^2}{n^2} \quad \text{sommable}$$

Ensuite, par Markov, $\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^4}\mathbb{E}[Z_n^4]$

donc $\sum \mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon)$ converge $\forall \varepsilon > 0$

ie $Z_n \xrightarrow{ps} 0$, et $S_n \xrightarrow{ps} \mathbb{E}[X]$ □